Walter Orlov

Goldener Schnitt und Eulersche Zahl

August 2004

Euklid (325-270 vor Christus) wird die Entdeckung des Streckenverhältnis Goldenen Schnittes zugeschrieben.

Unter Goldenem Schnitt versteht man solche Teilung eines Ganzen a zu zwei Teilen, sodass das Verhältnis des Ganzen zum großen Teil b dasselbe wie des großen Teil b zum kleinen Teil c ist. Daraus ergibt sich folgende quadratische Gleichung:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow a \cdot c = b^2 \Rightarrow b^2 - b \cdot c - c^2 = 0$$

Die standarte Lösung ist:

$$b_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + c^2}$$

Ziehen wir in Betracht nur positive Lösung, bekommen wir die Zahl des Goldenen Schnittes::

$$b = c \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618...$$

$$\Phi = 1.618...$$

Es gibt auch andere geometrische Methoden, die die gesuchte Teilung zu bekommen erlauben, aber sie sind schon unwichtig für unsere Untersuchung. Uns wird eher sogennante Fibonacci-Reihe sehr interessieren. Die wurde nach seinem Erfinder Leonardo Fibonacci (1170-1240) genannt. Jedes Glied dieser Reihe entsteht durch das Addieren von zwei vorangegangenen Gliedern:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...

In mathematischer Schreibweise sieht es so aus:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$
$$a_1 = 0, a_2 = 1.$$

Besonders an dieser Reihe ist es, dass deren Quotientenfolge gegen die Zahl Goldenen Schnittes konvergiert:

$$\lim \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \Rightarrow 1.618..., n \to \infty$$

In Wirklichkeit gibt es eigentlich mehr zu bewundern: Die erste zwei Glieder der Fibonacci-Reihe können beliebige Zahlen sein, trotzdem wird deren Quotientenfolge gegen den Goldenen Schnitt konvergieren.

Beispiel. Nehmen wir erste beste Zahlen $a_1 = 11.4$, $a_2 = -24.9$ und rechnen weitere Zahlen:

11.4, -24.9, -13.5, -38.4, -51.9, -90.3, -142.2, -232.5, -374.7...,

dann finden z.B. für drei letzte Zahlen die Quotienten:

$$-374.7/-232.5 = 1.611..., -232.5/-142.2 = 1.635...$$

Also, sie liegen wiederum dem Goldenen Schnitt nah. Man kann sich der "Hartnäckigkeit" der Fibonacci-Reihe nur wundern. Es müsste doch ein Gesetz geben, das dieses Verhalten erklärt.

Ja, schon verdächtig ist es, dass deren Quotientenfolge zum Goldenen Schnitt konvergiert. Doch dieser hat eher eine mystische Bedeutung. Er gilt als ästhetisch ideale Proportion, "Göttliche Teilung", als allgemeines Naturgesetz. Menschlicher Körper dürfte in den Proportionen des Goldenen Schnittes gebaut werden. Auch niedrigere Lebensformen und sogar Pflanzen oft erweisen gleiche Proportionen... Und all das wird keinesfalls durch reale physikalische Gesetze belegt! Mystisch? Nun hoffe ich, dass es in wenigen Minuten nicht mehr wird.

Hellhörig machte mich der Fakt, dass dieses Verhältnis bei den Lebensformen und vor allem bei der "Krönung der Schöpfung" - Menschen - zu beobachten ist. Es darf also etwas mit dem biologischen Wachstum zu tun haben.

Anderseits versteht man unter Teilung einen Zerfallprozess. Und in der Mathematik gibt es eine Zahl, mit deren Hilfe diese zwei gegenseitige Erscheinungen erfolgreich beschrieben werden, und zwar die Euleresche Zahl:

$$e = 2.718...$$

Diese Zahl trägt den Namen seines Erfinders Leonhard Euler

(1707-1783). Es gibt viele Formeln, die diese Zahl bestimmen. Die zwei bekannteste sind:

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, n \to \infty,$$

$$e = \sum \frac{1}{n!}, n = 0 \ldots \infty.$$

Obwohl weder diese noch die anderen Darstellungen Eulerscher Zahl eine Ähnlichkeit mit der Quotientenfolge der Fibonacci-Reihe haben, ist das unwichtig, da sich die Verwandtschaft zwischen Goldenen Schnitt und Eulereschen Zahl auf einer anderen Ebene erweist (es gibt zwar eine direkte mathematische Verbindung über hyprbolische Funktionen, aber in dieser Arbeit möchte ich nur nach physikalischen Hintergründen suchen).

Für die Beschreibung der Wachstums- bzw. Zerfallprozesse dient die expotentielle Funktion:

$$f(x) = f_0 \cdot e^{x}$$

Zwar wird dadurch der Mechanismus beschrieben, bei dem eine Menge proportional zu ihrer Größe wächst bzw. sich verringert. Und ähnlicher Mechanismus ist in "Göttliche Teilung" zu erkennen. In der Antike dachten Menschen nur an Verhältnis des Ganzen zum größerem Teil, Verhältnis des Ganzen zum kleineren Teil interessierte sie offensichtlich nicht. Doch gerade dieses Verhältnis zeigt, um wie viel sich das Ganze verringert hat. Und wie man schon erwarten könnte, entspricht es beinah der Eulereschen Zahl:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Rightarrow a\cdot c=b^2\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b^2}{c^2}=\Phi^2=2.618...$$

Das Ergebnis ist nur um 3.7% kleiner als Euleresche Zahl. Physikalisch gesehen, ist diese Abweichung vernachlässig. Alle reale Prozesse laufen nie genau nach den Formeln. Die Genauigkeit von ±5-10% kann man schon für gut halten. Auch, wenn Goldener Schnitt als Naturgesetz verstanden werden soll, liefern die Messergebnisse etwa eigenes Körpers die Werte zwischen 1.45 und 1.77, d.h. den Fehler von ungefähr ±10%.

Auf diese Weise kann man behaupten, dass der Goldene Schnitt die erste Definition der Eulereschen Zahl war, allerdings nicht als genauer mathematischen Zahl, sondern als Naturkonstante, die tatsächlich in vielen Naturgesetzen vorhandert ist. Und sogar noch mehr kommt zur Schein: Fibonacci-Reihe ist eine Reihendarstellung der Expotentfunktion.

Jedes nächstes Glied der Folge ist die Summe zwei vorheriger Glieder:

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

Zur Zahl a_{n-1} wird den Zusatz a_{n-2} zugefügt. Aber dieser Zusatz a_{n-2} ist bereits ein Teil von a_{n-1}:

$$a_{n-1}=a_{n-2}+a_{n-3}$$

Es handelt sich wiederum um denselben Mechanismus, den die expotentielle Funktion beschreibt. Somit ist in der Fibonacci-Reihe folgende Funktion verborgen:

$$f(n) = f_0 \cdot e^{n/2}$$

Das erklärt die "Hartnäckigkeit" der Fibonacci-Reihe: Die Quotienten o.g. Funktion ergeben schlicht die Wurzel aus Eulerescher Zahl. Ich möchte noch eine Vergleichstabelle schreiben, damit die Ähnlichkeit offensichtlicher wird:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{n/2}$	1	1.65	2.72	4.48	7.39	12.18	20.1	33.1	54.6	90
F.-R.	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Zwar wächst expotentielle Funktion schneller, aber darum ist Eulersche Zahl auch um 3.7% größer als Quadrat vom Goldenen Schnitt. Doch man kann beim Bedarf zu jedem Bereich eine Anpassung mittels f_0 vornehmen.

Eine weitere Bestätigung der Idee liefern Spiralstrukturen in der Natur, etwa von Schneckenhäusern oder Spiralgalaxien. Zeichnet man eine Linie aus dem Zentrum der Spirale nach außen, wird diese durch die Spiralstrahlen in Verhältnissen, die dem Goldenen Schnitt nah liegen, geschnitten. Anderseits kann eine Spiralstruktur mittels der Formel logarithmischen Spirale beschrieben werden:

$$r = r_0 \cdot e^{k\alpha}$$

Setzen wir $k = \frac{1}{4}\pi$, bekommen wir die Spirale, die die beschriebene Eigenschaft hat.

Zusammenfassung:

Man merkte schon in der Antik, dass sich Goldener Schnitt in der Natur oft wiederspiegelt. Da es dafür nie eine Erklärung gefunden wurde, bekam diese Zahl ihre mystische Deutung...

Jetzt können wir aber behaupten, dass das Verfahren, mit dem die Teilung durchgeführt wird, genau dem Mechanismus der Wachstums- bzw. Zerfallprozesse in der Natur entspricht. In moderner Wissenschaft werden diese Prozesse mit Hilfe von Eulerescher Zahl beschrieben. Dabei handelt es sich nicht nur um die biologische Prozesse, sondern fängt es schon auf der Atomebene an und geht bis zu gesellschaftlichen Phänomenen: Kernspaltung, Tunneleffekt, Resonanz mit der Dämpfung, Entladung eines Kondensators, explosionsartige chemische Prozesse, Wachstum von Bakterienpopulationen sowie der Populationen der Tiere bzw. gesamter Menschheit, Finanzwesen, Statistik usw. Es ist recht zu vermuten, dass die Weise des Wachstumsprozesses prägt auch das Endprodukt und dessen Größe, Form und Proportionen. Und dieses Endprodukt ist gerade das, was man mit bloßen Augen sieht. So erkanten schon die Menschen der Antike eine Proportion, die ihre Wurzeln noch in der Quantenwelt hat, den Goldenen Schnitt:

$$\Phi \approx \sqrt{e}$$